المحاضرة الخامسة : نظري

إثبات م3) لتكن $\{x_n\}$ كوشية ولتكن $\{x_{n_k}\}$ متتالية جزئية من الكوشية متقاربة من العنصر $x$ ، أي أن :

$$x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$$

حيث أن : حدود الجزئية هي : $x_{n_k} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\}$

وإن : $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ متتالية متزايدة "أياً كانت $k$"

و $n_k$ أعداد طبيعية أو صحيحة موجبة تماماً.

إن النهاية للمتتالية $\{x_n\}$ وحيدة أي متقاربة من عنصر وحيد ، حتى يتم المطلوب يجب إثبات أن :

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

من الحقيقة لدينا متراجحة المثلث :

$$0 \le d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x)$$

من أجل $k$ كبيرة جداً و $n$ كذلك :

فإن : $0 \le d(x_n, x) \le d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$

باختيار $\varepsilon$ صغير هذا يؤدي $d(x_n, x) < \varepsilon$

أي أن المتتالية الكوشية المفروضة متقاربة من العنصر $x$ من $X$ أي :

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ملاحظة : صحيح الاحتواء التالي على $[a,b]$

$$P_n[a,b] \subset C[a,b] \subset L_\infty[a,b]$$

وكذلك $P_n$ فضاء كثيرات الحدود من الدرجة $n$ وأقل أو يساوي $n$ والذي نعرفه على الفترة $[a,b]$ ويمكن تعريف عليها المسافة (تشيبيشيف) $d(P,Q) = \max_{a \le x \le b} |P(x) - Q(x)|$

واجب: أوجد المسافة بين التابعين $f(x) = x^2 ; g(x) = 2x - 1$ على الفترة $[0,1]$ على نفس المسافة السابقة.

6) د الفضاءات المترية التامة > :

في هذه الفقرة سيتم عرض صنف من الفضاءات المترية التي يكون من أجلها اعتبار كوشي محقق.

تعريف: الفضاء المتري التام: إذا كانت كل متتالية كوشية في الفضاء المتري $(X,d)$ متقاربة من عنصر أو نقطة منه فإننا نسمي $(X,d)$ فضاءً مترياً تاماً.

إذاً في الفضاء المتري التام تكون المتتالية متقاربة إذا وفقط إذا كانت كوشية.

مثلاً: لتكن $X=Q$ ولتكن المسافة بين $r_1, r_2$ معرفة بالعلاقة:

$d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ ... * $r_1, r_2 \in Q$

بسهولة يمكننا التأكد من أن $X=Q$ فضاءً مترياً وفق * وهذا ما فعلناه سابقاً من $R$.

ولو أخذنا المتتالية التالية $r_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ، $n \geq 1$ هذه المتتالية هي كوشية من $(Q,d)$ إلا أنه لا توجد لها نهاية في $Q$ وذلك لأن:

$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$

والعدد $e$ كما هو معروف ليس عادياً مما يترتب على أن الفضاء $(Q,d)$ ليس تاماً.

• هذ المتتالية: $r_n = \frac{1}{2n}$ هل يكون من أجلها الفضاء $(Q,d)$ متري تام؟!

• والتالي بعض الأمثلة على الفضاءات المترية التامة:

مثال 1: الفضاء المتري الحقيقي المألوف $(R,d)$ تام حيث $d(x,y) = |x-y|$

لأنه كما نعلم أن كل متتالية كوشية من $R$ هي متقاربة من عنصر منه وعندها يوجد عدد حقيقي هو أعلى لهذه المتتالية، وبالتالي $R$ يكون فضاء متري تام.

وهكذا بالنسبة لـ $\mathbb{C}$ العقدي.

مثال 2: الفضاءات التالية: $R^n$ ; $\mathbb{C}^n$ العقدي ، $C$ ، $C_0$ ، $C_1$ ،
$\underbrace{R\times R\times\cdots\times R}_{n \text{ مرة}}$ $\underbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{n \text{ مرة}}$

$l_\infty$ ، $l_p$ ، $\bar{R} = [-\infty, +\infty]$ جميعها تامة.

$C(R)$ مثبت في الكتاب

$C_{[a,b]}$ ليس فضاءً تاماً لأنه يوجد متتاليات كوشية منه غير متقاربة.

مثال 3: لنثبت أن فضاء التوابع المستمرة $C_{[0,1]}$ هو فضاء متري تام وذلك مع المسافة: ;

$d(x,y) = \max_{0\leq t\leq 1} |x(t) - y(t)|$

; $x = x(t), y = y(t) \in C_{[a,b]}$

الإثبات: لتكن $\{x_n\}$، $x_n = x_n(t)$ متتالية كوشية اختيارية من الفضاء $C[0,1]$ إن هذا يعني حسب تعريف الكوشية:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n, m > N = N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

أي:

$$n, m > N = N(\varepsilon) \Rightarrow \max_{0 \le t \le 1} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$$

وهذا الأخير هو شرط اختبار كوشي للتقارب المنتظم لمتتاليات التوابع

بحكم كفاية الشرط في هذا الاختبار، فإنه يوجد تابع $x = x(t)$ تتقارب منه بانتظام متتالية التوابع على الفترة $[0,1]$، وبما أن كل حدود هذه المتتالية هي توابع مستمرة على $[0,1]$ فإن التابع $x(t)$ التي تتقارب منه بانتظام هذه المتتالية هو أيضاً تابع مستمر على $[0,1]$ وبهذا الشكل فإنه يوجد تابع $x = x(t) \in C[0,1]$

$$\max_{0 \le t \le 1} |x_n(t) - x(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

نحن في هذه الحالة أثبتنا أن كل متتالية كوشية من الفضاء المذكور متقاربة من تابع ينتمي إليه وهذا يعني بدوره أن:

$C[0,1]$ هو فضاء متري تام.

ملاحظة: إن كثيراً من صفات ومميزات الفضاء المتري تبقى سارية المفعول من أجل أشباه المترية وأهم ما يميزهما المسافة أو المتريك بين نقطتين.

مثال: 4) الفضاء المتري المتقطع أو المبتذل والمعرّف بالشكل:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 ; & x \neq y \\ 0 ; & x = y \end{cases} \quad ; \quad x, y \in X$$

هذا الفضاء كما نعلم متري أثبتنا ذلك سابقاً (أي $(X, d)$)

وهو تام أي كل متتالية كوشية منه متقاربة من عنصر منه

7) لنورد هنا بعض التعاريف والتي لابد منها:

الجوار في الفضاء $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$: لتكن $a \in \mathbb{R}$ نقطة، نسمي مجموعة النقاط التي تحقق المتراجحة التالية:

$$\{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r ; r > 0\}$$

جواراً لها في $\mathbb{R}$.

حل هذه المتراجحة نحصل على فترة مفتوحة من $\mathbb{R}$

وبشكل مماثل من الفضاء $\mathbb{C}$ العقدي المجموعة:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r ; r > 0\}$$

أي مجموعة النقاط التي تحقق هذه المتراجحة تسمى قرصاً من $\mathbb{C}$

2) الكرة المفتوحة: ليكن $(X,d)$ فضاء متري و $a\in X$ نقطة منه، نسمي مجموعة النقاط:

$$S(a,r)=\{x\in X : d(x,a)<r ;\ r>0\} \quad \ldots (1)$$

كرة مفتوحة نرمزها $S(a,r)$.

أي أنّ: $S(a,r)$ هي الكرة المفتوحة التي مركزها $a$ ونصف قطرها $r$ العدد الموجب.

3) الكرة المغلقة: نسمي مجموعة النقاط:

$$S[a,r]=\{x\in X : d(x,a)\leq r ;\ r>0\} \quad \ldots (2)$$

كرة مغلقة مركزها $a$ ونصف قطرها العدد الموجب $r$ ونرمزها بـ $S[a,r]$

4) سطح الكرة (القشرة الكروية): هي مجموعة النقاط:

$$\dot{S}(a,r)=\{x\in X : d(x,a)=r ;\ r>0\} \quad \ldots (3)$$

ومنه ينتج أنّ:

$$\dot{S}(a,r)=S[a,r]-S(a,r) \quad \ldots (4)$$

وهكذا بالنسبة لباقي التعاريف في الفضاء المتري المجموعة المفتوحة والمجموعة المغلقة، اللاصقة، المجموعة الكثيفة، فضاء فصول، .... من الكتاب

مثال:

إنّ $\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[=\{0\}$ وهذه ليست مجموعة مفتوحة كما نعلم $n\in\mathbb{N}$ ، $(n\geq 1)$ ((أما بالنسبة للاتحاد فهي مجموعة مفتوحة))

وهنا نقول إذا كان $(X,d)$ فضاء متري فإنّ كل من $X$ ، $\phi$ مجموعتان مفتوحتان ومغلقتان معاً. ثم تعمّم ذلك من أجل عدد منتهٍ وغير منتهٍ من المجموعات المفتوحة / المغلقة.

مثال: المجموعة $Q$ في الفضاء $(\mathbb{R},d)$ كثيفة في $\mathbb{R}$ لأنّ $\bar{Q}=\mathbb{R}$ .

كل نقطة تراكم هي نقطة ملاصقة أو لاصقة، إلا أنّ العكس ليس صحيح بالضرورة.

والفضاء المتري $(\mathbb{R},d)$ فضاء فصول مع المسافة $|\ |$ لأنّ $Q$ كثيفة وقابلة للعد (عدودة).

مجموعة وحيدة العنصر لاصقة هي المجموعة نفسها ولكن لا يوجد نقط تراكم لها.

مثال (1): ليكن $(\mathbb{R}, |\ |)$ الفضاء المتري الحقيقي المألوف، ولتكن $a \in \mathbb{R}$ نقطة منه، ولنفرض $r > 0$ عندئذٍ نجد:

$S(a,r) = ]a-r, a+r[$

و $S[a,r] = [a-r, a+r]$

و $\dot{S}(a,r) = S[a,r] - S(a,r) = \{a-r, a+r\}$

مثال (2): ليكن $(X,d)$ فضاء متري منقطع (أو المتبدل أو التافه) والذي هو تام كما أسلفنا. ولتكن $a \in X$ و $r > 0$، ولنميز هنا عدة حالات:

أ- إذا كان $0 < r < 1$ فإن:

$S(a,r) = \{a\}$ , $S[a,r] = \{a\}$ , $\dot{S}(a,r) = \phi$

ب- إذا كان $r > 1$ فإن:

$S(a,r) = X$ , $S[a,r] = X$ , $\dot{S}(a,r) = \phi$

واجب ج- إذا كان $r = 1$ فإن:

$S(a,r) =$ $S[a,r] =$ $\dot{S}(a,r)$

ملاحظة: 1) واضح أن تعريف المجموعة المفتوحة يعتمد على وجود كرات مفتوحة التي بدورها تعتمد على المسافة أو المتريك المعرفة على $X$، فهذا يعني ضمنياً أن المجموعة المفتوحة تعتمد على شكل المسافة أو المتريك ( ) $d$ وبالتالي يطلق عليها المجموعة المفتوحة منسوبة إلى $d$ أي: ( $(d\text{-open})$ set ).

ونلاحظ أن الكرة المفتوحة $S(a,r)$ التي مركزها $a$ ونصف قطرها $r$ تمثل مجموعة مفتوحة

2) إن الكرات المفتوحة في $(\mathbb{R},d)$ تطابق الفترات المفتوحة إذا كانت $d$ هي المسافة المألوفة على $\mathbb{R}$، وهكذا نجد أسرة الكرات المفتوحة في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^2,d)$ تطابق أسرة الدوائر المفتوحة (أو الأقراص) فيه. إذا أخذنا $d$ هي المسافة الإقليدية، وعندها نقول لدينا دائرة مفتوحة أو قرص بدلاً من قولنا كرة مفتوحة.

ينتج أيضاً أن كل كرة مغلقة ومفتوحة تكون مجموعة محدودة في الفضاء المتري.

3) إن كل المجموعات في الفضاء المتري المنقطع هي مفتوحة ومغلقة بآن واحد

مبرهنة 2: كل فضاء جزئي مغلق من فضاء متري تام يكون جزئي تام.

الإثبات: ليكن $(X,d)$ فضاء متري تام و $F$ فضاء جزئي مغلق منه (أي $F \subset X$) ولنثبت أن هذا الأخير تام

الآن: لنفرض أن $\{x_n\}$ متتالية كوشية في الفضاء الجزئي المغلق $F$ وهي بنفس الوقت من الفضاء المتري $X$ التام، مما يعني أن لها نهاية فيه مثل $x \in X$ (أي $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$) ولنميز هنا بين حالتين :

إما $x \in F$ أو $x \in \bar{F} = F$ طالما $F$ مغلقة ومن الحالتين ينتج أن المتتالية الكوشية $\{x_n\}$ تتقارب من نقطة من $F$ إذاً $F$ فضاء متري جزئي مغلق تام .

مثال على ذلك : إذا أخذنا الفضاء المتري الحقيقي المألوف $(\mathbb{R},d)$ ، $F = \mathbb{Q}$ الجزئي من $\mathbb{R}$ ، فإن $(\mathbb{Q},d)$ ليس فضاء متري تام لأن المجموعة $\mathbb{Q}$ (أو كفضاء جزئي) ليست مغلقة .

أما بالنسبة لـ $\mathbb{Z}$ فهي مغلقة في $\mathbb{R}$ ولذا فإن $(\mathbb{Z},d)$ فضاء متري تام .

للمضي للأمام للإتمام لدينا التعريف التالي :

تعريف < مجموعة أو متتالية الكرات المغلقة المتداخلة > : هي عبارة عن متتالية متناقصة من الكرات المغلقة $\{S_n\}$ حيث : $S_1 \supset S_2 \supset \dots \supset S_n \supset \dots$ (المتوضعة كل منها في الأخرى) والتي تسعى متتالية أقطارها إلى الصفر .

أي : $\delta_n = \delta(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (أو $d_n = d(S_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)

مبرهنة 3 < مبرهنة الكرات المغلقة المتداخلة > : (الإثبات غير مطلوب)

ليكن $(X,d)$ فضاء متري . يكون هذا الفضاء تام إذا وفقط إذا كان تقاطع أي متتالية متناقصة من الكرات المغلقة والتي أقطارها تسعى للصفر غير خالٍ أي :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \phi$$

واجب : اكتب تعريف التبولوجيا ثم هات مثال على التبولوجي ولا تبولوجي :

## - الفصل الثالث -

الفضاءات الخطية - التحليل من الفضاءات الخطية المنظمة - فضاء باناخ

نعلم أنّ لكل مسألة خطية بنية رياضية تعرف باسم فضاء خطي (أو متجهي أو شعاعي) وهنا إذا أخذنا الفضاء المتجهي (الخطي) وعرّفنا عليه متريكاً بواسطة نظيم وعندها يسمى الفضاء منظماً، وإذا كان هذا الفضاء متري تام فإنه يسمى فضاء باناخ حيث التقارب بالنظيم.

إن نظرية الفضاءات المنظمة وخاصة فضاء باناخ تعتبر أساس التحليل التابعي، وهذا الفصل سيهتم بذلك (سندرس نوع خاص من الفضاءات المترية).

1) تعريف الفضاء الخطي (المتجهي) وخواصه:

لنرمز بـ $K$ إما للحقل الحقيقي $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$ العقدي، ولتكن $X$ مجموعة ما من العناصر غير الخالية ولنعرّف التطبيقين (التابعين) التاليين:

$$(+): X \times X \longrightarrow X$$
$$; \quad (x,y) \longmapsto +(x,y) \longrightarrow x+y$$
$$(\cdot): K \times X \longrightarrow X$$
$$; \quad (\lambda,y) \longrightarrow (\cdot)(\lambda,y) = \lambda.y$$

بهذا عرّفنا على المجموعة $X$ العمليتين $(+)$ و $(\cdot)$ على عناصرها، الأولى تسمى الجمع والثانية الضرب بعدد من $K$، تشكل المجموعة $X$ مع هاتين التطبيقين تحقق الشرطين التاليين:

I) $X$ هي زمرة تبديلية بالنسبة لقانون الجمع $(+)$ المعرّف بالتطبيق الأول:

1) $x+y = y+x \quad ; \quad x,y \in X$

2) $(x+y)+z = x+(y+z) \quad ; \quad x,y,z \in X$

3) $\exists\, \theta \in X : x+\theta = x \quad , \quad x \in X$

4) $\forall x \in X \;, \exists\, (-x) \in X : x+(-x) = \theta$

نسمّي هنا $\theta$ العنصر الحيادي أو المحايد ويسمى أيضاً بالعنصر الصفري أو صفر الفضاء $X$ و $(-x)$ نظير العنصر $x$ بالنسبة لعملية الجمع $(+)$